



---

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais**

---

11.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 835/2.ª Fase**

15 Páginas

---

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

---

**2015**

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

---

**Página em branco**

---

---

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
  - as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
  - as listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

# Formulário

---

## Teoria matemática das eleições

### Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

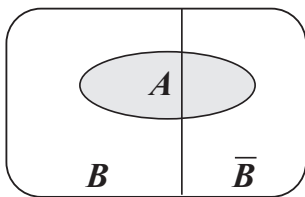
## Modelos de grafos

### Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

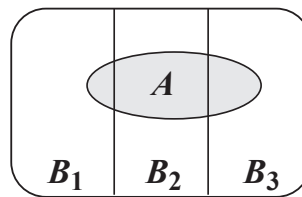
## Probabilidades

### Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3

## Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável normal  $X$ , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left[ \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
<p><math>n</math> – dimensão da amostra  <math>\bar{x}</math> – média amostral  <math>\sigma</math> – desvio padrão da variável  <math>z</math> – valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável  $X$ , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left[ \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$
<p><math>n</math> – dimensão da amostra  <math>\bar{x}</math> – média amostral  <math>s</math> – desvio padrão amostral  <math>z</math> – valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para uma proporção  $p$ , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left[ \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$
<p><math>n</math> – dimensão da amostra  <math>\hat{p}</math> – proporção amostral  <math>z</math> – valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
$z$	1,645	1,960	2,576

---

**Página em branco**

---

---

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

---

1. Na empresa de transportes de mercadorias Para Todo o Mundo (PTM), realiza-se anualmente um congresso que conta com a presença de funcionários das diferentes filiais.

Em 2016, o congresso terá 200 participantes.

Na Tabela 1, indicam-se as filiais que marcarão presença no congresso e o número de funcionários de cada uma delas.

**Tabela 1**

Filiais	A	B	C	D
Número de funcionários	300	560	830	240

Na opinião dos sócios da PTM, a distribuição dos 200 convites para o congresso deve ter em conta o número de funcionários afetos a cada filial. Como tal, propõem a aplicação do método a seguir descrito para distribuir os convites pelas quatro filiais.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de funcionários pelo número de convites a distribuir.
- Calcula-se a quota padrão para cada uma das filiais, dividindo-se o número de funcionários de cada filial pelo divisor padrão.
- Se a quota padrão de uma filial é um número inteiro, atribui-se à filial essa quota.
- Se a quota padrão de uma filial não é um número inteiro, calcula-se  $\sqrt{L(L+1)}$ , sendo  $L$  o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Se a quota padrão de uma filial é menor do que  $\sqrt{L(L+1)}$ , atribui-se a essa filial uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão; se a quota padrão de uma filial é maior do que  $\sqrt{L(L+1)}$ , atribui-se a essa filial uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Caso a soma das quotas padrão arredondadas seja igual ao número de convites a distribuir, o método dá-se por finalizado e assume-se que cada filial recebe um número de convites igual à quota padrão arredondada; caso a soma das quotas padrão arredondadas seja diferente do número de convites a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota modificada de cada filial.
- Repetem-se os cinco pontos anteriores até se obter a soma das quotas padrão modificadas igual ao número de convites a distribuir, atribuindo-se a cada filial o número de convites igual à respetiva quota padrão modificada.

Determine o número de convites para o congresso que cada filial da PTM irá receber de acordo com a aplicação do método proposto pelos sócios.

Apresente os valores das quotas padrão e os valores de  $\sqrt{L(L+1)}$  arredondados com três casas decimais.

2. O Sr. Pereira é motorista da empresa PTM.

2.1. Num certo dia, o Sr. Pereira tem de passar nas cidades A, B, D e E, não necessariamente por esta ordem, partindo da sede da empresa, localizada na cidade C, e regressando ao local de partida. Nesse percurso, não pode passar pela mesma cidade mais do que uma vez.

Na Tabela 2, estão assinaladas com o símbolo ✓ as ligações rodoviárias existentes entre as cidades. O símbolo x significa que não existe ligação rodoviária entre as cidades.

Tabela 2

	A	B	C	D	E
A		✓	x	✓	✓
B			✓	x	✓
C				✓	x
D					✓
E					

O Sr. Pereira, ao organizar o percurso, considerou duas possibilidades:

**alternativa 1:** passar pela cidade A e só depois pela cidade E.

**alternativa 2:** passar pela cidade D antes de passar pela cidade B.

O Sr. Pereira afirma que a alternativa 1 permite definir mais percursos do que a alternativa 2.

O Sr. Pereira tem razão? Justifique, apresentando um grafo que modele a situação descrita, e identifique todos os percursos possíveis para cada uma das alternativas.



2.2. O veículo da empresa que o Sr. Pereira conduz é utilizado todos os dias, mesmo quando o Sr. Pereira está de folga.

O departamento de contabilidade da PTM necessita de informação sobre os gastos diários de cada veículo em portagens. Assim, em cada veículo, existe um impresso destinado ao registo desses gastos diários e que é entregue ao departamento de contabilidade no final de cada mês de trabalho.

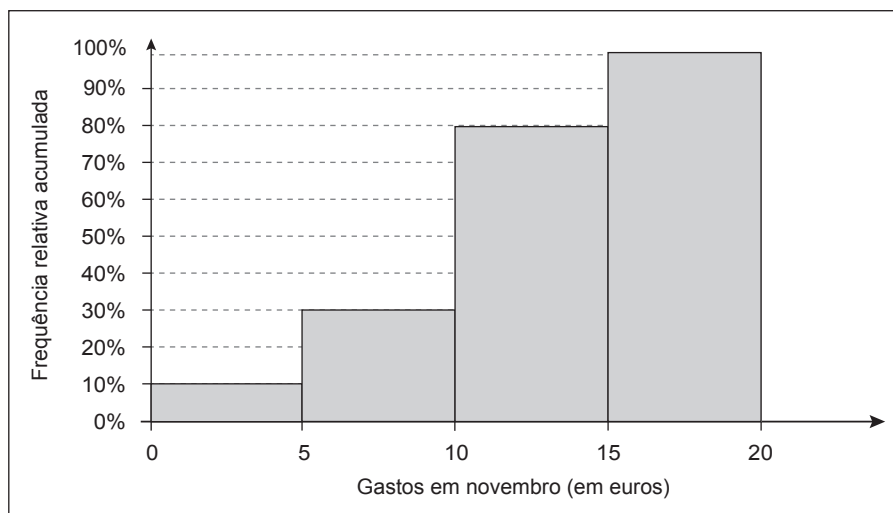
A Tabela 3 apresenta uma síntese dos dados referentes ao mês de abril do veículo que o Sr. Pereira conduz.

**Tabela 3**

Gastos em abril (em euros)	[0, 5[	[5, 10[	[10, 15[	[15, 20[
Número de dias	3	9	15	3

No Gráfico 1, está representado o histograma de frequências relativas acumuladas com os dados relativos aos gastos do veículo do Sr. Pereira em portagens, no mês de novembro.

**Gráfico 1**



Depois de analisar os dados sobre os gastos deste veículo, o Sr. Pereira afirma:

«Curioso, nos meses de abril e de novembro, foi igual o número de dias em que a quantia gasta em portagens foi inferior a 10 euros.»

Verifique se o Sr. Pereira tem razão, apresentando todos os cálculos que fundamentam a sua resposta.

- 2.3. No final do primeiro semestre, feita a contabilidade da empresa, verificou-se que os gastos diários de cada veículo em portagens seguem uma distribuição normal com valor médio igual a  $\mu$  euros e desvio padrão igual a  $\sigma$  euros, com  $\mu > 2\sigma$

Escolhe-se, aleatoriamente, um dia.

Determine a probabilidade de, nesse dia, o gasto em portagens ser superior a  $\mu + 2\sigma$  euros.

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Note que:

Se  $X$  é uma variável aleatória normal de valor médio  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68,27\%$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95,45\%$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99,73\%$$

---

**Página em branco**

---

3. Os dois sócios da PTM, David e Tomás, estão em conflito e pretendem partilhar os bens da empresa. Decidem negociá-los entre si, utilizando o método que a seguir se descreve.

- Cada sócio atribui, secretamente, pontos a cada um dos bens, de modo que o total dos seus pontos seja 100.
- Cada bem é destinado, temporariamente, ao sócio que mais o valoriza. Determina-se o total de pontos dos bens temporariamente destinados a cada sócio. Seja  $A$  o sócio com o total de pontos mais elevado e  $B$  o outro sócio.
- Proceda-se ao ajuste da partilha, pois os sócios devem ficar com igual total de pontos. Será o bem que tiver menor diferença de pontos atribuídos o usado para fazer o ajuste, sendo esse o bem a partilhar pelos sócios.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao sócio  $A$  pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e  $x$  por cento do valor por ele atribuído ao bem a partilhar.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao sócio  $B$  pela soma do total temporário dos seus pontos com  $x$  por cento do valor por este atribuído ao bem a partilhar.
- Igualam-se os dois totais finais de modo a determinar o valor de  $x$  para o qual a partilha fica equilibrada.

A Tabela 4 apresenta os pontos atribuídos por cada um dos sócios aos bens da empresa.

**Tabela 4**

Bens	Sócios	
	David	Tomás
Frota de motos	20	25
Frota de automóveis	45	25
Avião	35	50

Proceda à partilha dos bens, aplicando o método acima descrito.

Na sua resposta:

- apresente a partilha temporária dos bens pelos sócios;
- determine o total de pontos dos bens temporariamente destinados a cada sócio;
- selecione o bem a utilizar no ajuste da partilha;
- apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;
- prove que, com a solução encontrada (valor arredondado às centésimas), ambos os sócios ficam com igual total de pontos;
- apresente a partilha final dos bens.

4. Certo dia, vieram a público rumores da separação dos sócios e a cotação em bolsa das ações da PTM entrou em queda. A cotação  $C$  (em euros) de cada ação, no final de cada dia de negociação em bolsa,  $t$  dias após os rumores terem começado, é bem aproximada pelo modelo seguinte, com arredondamento às centésimas.

$$C(t) = 5,1 - 3 \log_{10}(t + 0,1), \text{ com } 1 \leq t \leq 20$$

No modelo,  $t = 1$  corresponde ao fim do primeiro dia de negociação das ações em bolsa, após o início dos rumores. Assim, por exemplo, a cotação de cada ação, em euros, no final do terceiro dia de negociação em bolsa, após o início dos rumores, é 3,63 euros, pois  $C(3) \approx 3,626$

- 4.1. Qual foi o valor da desvalorização de cada ação, desde o final do primeiro dia de negociação das ações até ao final do sétimo dia?

Apresente a resposta arredondada às centésimas.

- 4.2. Durante quantos dias de negociação das ações em bolsa, após o início dos rumores, a cotação de cada ação, no final do dia, foi superior a um terço do valor registado no final do segundo dia de negociação?

5. A PTM apresenta diversas soluções de transporte, tentando ir ao encontro das necessidades dos seus clientes. Estes podem escolher apenas o transporte rodoviário, apenas o transporte aéreo ou ainda uma combinação dos dois.

5.1. No final de 2012, a empresa fez o balanço dos serviços contratados pelos clientes, tendo chegado aos seguintes valores:

- em 87% dos serviços foi utilizado (exclusivamente ou não) o transporte rodoviário;
- em 45% dos serviços foi utilizado (exclusivamente ou não) o transporte aéreo.

Determine a probabilidade de, escolhido um serviço prestado ao acaso, este ter sido efetuado recorrendo apenas a um dos dois tipos de transporte.

Apresente o resultado em percentagem.

5.2. Em 2013, a empresa fez um estudo cujo objetivo era verificar se os prazos de envio de mercadorias acordados com os clientes tinham sido respeitados. Nesse ano, os dados revelaram que:

- 78% das mercadorias foram transportadas por meio rodoviário;
- 77,8% das mercadorias transportadas chegaram ao seu destino dentro do prazo estabelecido;
- das mercadorias transportadas por meio rodoviário, 80% chegaram ao seu destino dentro do prazo estabelecido.

Determine a probabilidade de, escolhida ao acaso uma mercadoria, esta não ter sido transportada por meio rodoviário, sabendo-se que chegou ao seu destino dentro do prazo acordado com o cliente.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5.3. Em 80% dos serviços marcados pelo Sr. Correia, funcionário administrativo da PTM, foi utilizado o transporte rodoviário.

Qual é a probabilidade de, ao serem marcados três serviços, em exatamente dois deles ser utilizado o transporte rodoviário?

Apresente o resultado em percentagem.

5.4. Numa amostra aleatória de 40 serviços contratados à PTM, verificou-se que, em média, as mercadorias chegam ao seu destino 6 horas depois do prazo acordado e que o valor do desvio padrão dessa amostra é de meia hora.

Obtenha a margem de erro de um intervalo de confiança a 95% para o atraso médio, em horas, da entrega de todas as mercadorias transportadas pela empresa.

Apresente o resultado com arredondamento às milésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

**FIM**

## COTAÇÕES

1.	.....	25 pontos	
			<hr/>
			<b>25 pontos</b>
2.			
2.1.	.....	20 pontos	
2.2.	.....	15 pontos	
2.3.	.....	15 pontos	
			<hr/>
			<b>50 pontos</b>
3.	.....	20 pontos	
			<hr/>
			<b>20 pontos</b>
4.			
4.1.	.....	15 pontos	
4.2.	.....	20 pontos	
			<hr/>
			<b>35 pontos</b>
5.			
5.1.	.....	20 pontos	
5.2.	.....	20 pontos	
5.3.	.....	15 pontos	
5.4.	.....	15 pontos	
			<hr/>
			<b>70 pontos</b>
			<hr/>
	<b>TOTAL</b> .....	<b>200 pontos</b>	



---

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais**

---

11.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 835/2.ª Fase**

---

Critérios de Classificação

11 Páginas

---

**2015**

VERSÃO DE TRABALHO



## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos processos de resolução, termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora», «na sua resposta, deve»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.

Situação	Classificação
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.

Situação	Classificação
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... 25 pontos
- Calcular o total de funcionários ..... 2 pontos
- Calcular o divisor padrão ..... 3 pontos
- Calcular as quotas padrão ..... (1 + 1 + 1 + 1) ..... 4 pontos
- Calcular  $\sqrt{L(L+1)}$  ..... (2 + 2 + 2 + 2) ..... 8 pontos
- Atribuir as quotas padrão arredondadas ..... (1 + 1 + 1 + 1) ..... 4 pontos
- Indicar a distribuição dos convites ..... (1 + 1 + 1 + 1) ..... 4 pontos  
[Filial A: 31; Filial B: 58; Filial C: 86; Filial D: 25]
- 2.1. .... 20 pontos
- Apresentar um grafo que modele a situação ..... 6 pontos
- Apresentar os percursos correspondentes à alternativa 1 (ver **nota**)..... 6 pontos
- Apresentar os percursos correspondentes à alternativa 2 (ver **nota**)..... 6 pontos
- Concluir ..... 2 pontos
- [O Sr. Pereira não tem razão, pois ambas as alternativas permitem definir dois percursos]
- Nota** – Se, na resposta, for apresentada uma árvore que permita concluir os percursos existentes para cada alternativa, a pontuação a atribuir nestas etapas não deve ser desvalorizada.
- 2.2. .... 15 pontos
- Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.
- 1.º Processo**
- Indicar o número de dias do mês de abril com gastos inferiores a 10 euros..... 3 pontos
- Determinar o número de dias do mês de novembro com gastos inferiores a 10 euros ..... 10 pontos
- Identificar a frequência relativa acumulada da classe  $[5, 10[$  ..... 3 pontos
- Determinar o número de dias pretendido ..... 7 pontos
- Concluir ..... 2 pontos
- [O Sr. Pereira não tem razão, pois em abril são 12 dias e em novembro são 9 dias]

## 2.º Processo

Calcular a frequência relativa acumulada da classe  $[5, 10[$  no mês de abril.. 8 pontos

Indicar a frequência relativa acumulada da classe  $[5, 10[$  no mês de novembro ..... 3 pontos

Concluir ..... 4 pontos

[O Sr. Pereira não tem razão dado que os meses de abril e de novembro têm o mesmo número de dias (30); logo, frequências relativas acumuladas diferentes implicam frequências absolutas diferentes]

2.3. .... 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Indicar o valor de  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$  ( $\approx 0,9545$ ) ..... 3 pontos

Determinar o valor de  $1 - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$  ( $\approx 0,0455$ ) ..... 5 pontos

Determinar o valor de  $\frac{1 - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)}{2}$  ( $\approx 0,02275$ ) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (2,28%) ..... 2 pontos

### 2.º Processo

Indicar o valor de  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$  ( $\approx 0,9545$ ) ..... 3 pontos

Determinar o valor de  $P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$  ( $\approx 0,47725$ ) ..... 5 pontos

Referir que  $P(X > \mu + 2\sigma) = 0,5 - P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$  ( $\approx 0,02275$ ) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (2,28%) ..... 2 pontos

3. .... 20 pontos

Indicar a partilha temporária dos bens ..... 3 pontos

Determinar o total de pontos dos bens temporariamente atribuídos ..... 3 pontos

Selecionar o bem a utilizar no ajuste da partilha (frota de motos) ..... 3 pontos

Apresentar a equação que traduz o equilíbrio da partilha ..... 4 pontos

Resolver a equação ..... 3 pontos

Concluir ..... 4 pontos

Indicar os pontos atribuídos ao David ( $\approx 58,33$ ) ..... 1 ponto

Indicar os bens atribuídos ao David ..... 1 ponto

[A frota automóvel e  $2/3$  da frota de motos]

Indicar os pontos atribuídos ao Tomás ( $\approx 58,33$ ) ..... 1 ponto

Indicar os bens atribuídos ao Tomás ..... 1 ponto

[O avião e  $1/3$  da frota de motos]

4.1. .... 15 pontos

- Calcular a cotação das ações no final do primeiro dia de negociação ..... 5 pontos
- Reconhecer que  $t = 1$  ..... 1 ponto
- Determinar  $C(1)$  ( $\approx 4,98$  euros) ..... 4 pontos
- Calcular a cotação das ações no final do sétimo dia de negociação ..... 6 pontos
- Reconhecer que  $t = 7$  ..... 2 pontos
- Determinar  $C(7)$  ( $\approx 2,55$  euros) ..... 4 pontos
- Calcular  $C(7) - C(1)$  na forma pedida ( $-2,43$  euros) (ver **nota 1**) ..... 2 pontos
- Indicar o valor da desvalorização ( $2,43$  euros) (ver **nota 2**) ..... 2 pontos

**Nota 1** – Se, na resposta, for apresentado o valor de  $C(1) - C(7)$ , a pontuação a atribuir nesta etapa não deve ser penalizada.

**Nota 2** – Se, na resposta, se concluir que a desvalorização foi de  $-2,43$  euros, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser 0 pontos.

4.2. .... 20 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

**1.º Processo**

Resposta obtida com recurso às potencialidades gráficas da calculadora.

- Determinar a cotação das ações no fim do segundo dia de rumores ( $\approx 4,13$  euros) 2 pontos
- Calcular um terço da cotação do valor das ações no fim do segundo dia de rumores ..... 3 pontos
- Apresentar os elementos recolhidos na utilização da calculadora ..... 8 pontos
- Apresentar o gráfico ..... 4 pontos
- Apresentar as coordenadas relevantes ..... 4 pontos
- Indicar o número de dias (17) ..... 7 pontos

## 2.º Processo

Resposta obtida com recurso a uma tabela.

Determinar a cotação das ações no fim do segundo dia de rumores ( $\approx 4,13$ euros)	2 pontos
Calcular um terço da cotação do valor das ações no fim do segundo dia de rumores .....	3 pontos
Apresentar os elementos recolhidos na utilização da calculadora .....	8 pontos
Apresentar uma tabela adequada .....	4 pontos
Apresentar linhas relevantes .....	4 pontos
Indicar o número de dias (17) .....	7 pontos

## 3.º Processo

Resposta obtida por processos analíticos.

Determinar a cotação das ações no fim do segundo dia de rumores ( $\approx 4,13$ euros)	2 pontos
Calcular um terço da cotação do valor das ações no fim do segundo dia de rumores .....	3 pontos
Escrever $C(t) = 1,38$ .....	3 pontos
Obter $\log_{10}(t + 0,1) = 1,24$ (ou equivalente) .....	5 pontos
Indicar o número de dias (17) .....	7 pontos

5.1. .... 20 pontos

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$R$ : «o serviço inclui transporte rodoviário»;

$A$ : «o serviço inclui transporte aéreo».

Escrever $P(R) = 87\%$ .....	1 ponto
Escrever $P(A) = 45\%$ .....	1 ponto
Obter $P(R \cap A) = 32\%$ .....	5 pontos
Obter $P(A \cap \bar{R})$ (13%) .....	5 pontos
Obter $P(R \cap \bar{A})$ (55%) .....	5 pontos
Calcular $P(A \cap \bar{R}) + P(\bar{A} \cap R)$ (68%) .....	3 pontos

5.2. .... 20 pontos

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$R$ : «a mercadoria foi transportada por meio rodoviário»;

$D$ : «a mercadoria chega ao destino no prazo estabelecido».

Calcular  $P(R \cap D)$  ..... 9 pontos

Escrever  $P(R) = 0,78$  ..... 1 ponto

Escrever  $P(D|R) = 0,8$  ..... 3 pontos

Obter  $P(R \cap D)$  ..... 5 pontos

Escrever  $P(R \cap D) = P(R) \times P(D|R)$  (ver nota). 4 pontos

Obter  $P(R \cap D) = 0,624$  ..... 1 ponto

Calcular  $P(\bar{R} \cap D)$  ..... 7 pontos

Escrever  $P(D) = 0,778$  ..... 1 ponto

Escrever  $P(\bar{R} \cap D) = P(D) - P(R \cap D)$  (ver nota) ..... 5 pontos

Obter  $P(\bar{R} \cap D) = 0,154$  ..... 1 ponto

Calcular  $P(\bar{R}|D)$  ..... 4 pontos

Escrever  $P(\bar{R}|D) = \frac{P(\bar{R} \cap D)}{P(D)}$  (ver nota) ..... 3 pontos

Obter  $P(\bar{R}|D) (\approx 20\%)$  ..... 1 ponto

**Nota** – Se a resposta não apresentar a expressão, mas apresentar o valor correto da probabilidade, a pontuação a atribuir nesta etapa não deve ser desvalorizada.

5.3. .... 15 pontos

Considere-se o seguinte acontecimento:

$R$ : «nos serviços marcados, é utilizado o transporte rodoviário».

Escrever  $P(R) = 0,8$  ..... 1 ponto

Calcular  $P(\bar{R})$  ..... 2 pontos

Escrever  $P(\bar{R}) = 1 - P(R)$  ..... 1 ponto

Obter  $P(\bar{R}) = 0,2$  (ver nota) ..... 1 ponto

Escrever  $0,8 \times 0,8 \times 0,2 \times 3$  ( $2 + 2 + 2 + 4$ ) (ou equivalente) ..... 10 pontos

Obter o valor pedido (38,4%) ..... 2 pontos

**Nota** – Se a resposta não apresentar a expressão, mas apresentar o valor correto da probabilidade, a pontuação a atribuir nesta etapa não deve ser desvalorizada.



5.4. .... 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Identificar os valores de  $n$ , de  $s$  e de  $z$  para um intervalo a 95% de confiança ..... 5 pontos

$n = 40$  ..... 1 ponto

$s = 0,5$  ..... 2 pontos

$z = 1,960$  ..... 2 pontos

Determinar o erro (0,155) ..... 10 pontos

**2.º Processo**

Identificar os valores de  $n$ , de  $s$ , de  $z$  e de  $\bar{x}$  para um intervalo a 95% de confiança ..... 6 pontos

$n = 40$  ..... 1 ponto

$s = 0,5$  ..... 2 pontos

$z = 1,960$  ..... 2 pontos

$\bar{x} = 6$  ..... 1 ponto

Determinar os extremos de um intervalo a 95% de confiança ..... 6 pontos

Determinar o erro (0,155) ..... 3 pontos

VERSÃO DE TRABALHO

## COTAÇÕES

1.	.....	25 pontos	
		<hr/>	<b>25 pontos</b>
2.			
2.1.	.....	20 pontos	
2.2.	.....	15 pontos	
2.3.	.....	15 pontos	
		<hr/>	<b>50 pontos</b>
3.	.....	20 pontos	
		<hr/>	<b>20 pontos</b>
4.			
4.1.	.....	15 pontos	
4.2.	.....	20 pontos	
		<hr/>	<b>35 pontos</b>
5.			
5.1.	.....	20 pontos	
5.2.	.....	20 pontos	
5.3.	.....	15 pontos	
5.4.	.....	15 pontos	
		<hr/>	<b>70 pontos</b>
		<hr/>	
	<b>TOTAL</b> .....		<b>200 pontos</b>