GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 835/1.ª Fase

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não for pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente, sempre que recorrer:

- às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
- a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- a estatísticas obtidas na calculadora (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, nas páginas 4 e 5, o Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Teoria Matemática das Eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

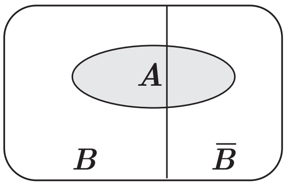
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

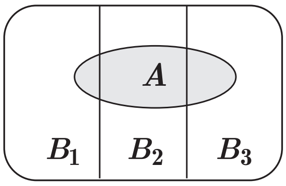
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})=$$
$$=P(B)\times P(A\mid B)+P(\bar{B})\times P(A\mid \bar{B})$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B)\times P(A\mid B)}{P(B)\times P(A\mid B)+P(\bar{B})\times P(A\mid \bar{B})}$$



$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+P(A\cap B_3)=$$
$$=P(B_1)\times P(A\mid B_1)+P(B_2)\times P(A\mid B_2)+P(B_3)\times P(A\mid B_3)$$

$$P(B_k\mid A)=\frac{P(A\cap B_k)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B_k)\times P(A\mid B_k)}{P(B_1)\times P(A\mid B_1)+P(B_2)\times P(A\mid B_2)+P(B_3)\times P(A\mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$\left]\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais.

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$

1. Em 2011, a junta de freguesia de Freixo dinamizou algumas atividades sob a responsabilidade de uma comissão organizadora.

1.1. Para constituir a comissão, foi aberto um concurso.

A Maria (M), a Luísa (L) e a Fernanda (F) candidataram-se ao cargo de presidente da comissão organizadora das atividades, sendo a escolha feita por votação.

Cada habitante de Freixo ordenou, uma única vez, os nomes das três candidatas, de acordo com as suas preferências. A ordenação efetuada por cada habitante corresponde a um voto. Foram apurados 6100 votos válidos.

Na Tabela 1, encontram-se organizados os resultados obtidos.

Tabela 1

	1500 votos	**2100 votos**	**1000 votos**	**1500 votos**
1.ª preferência	M	L	F	F
2.ª preferência	L	F	L	M
3.ª preferência	F	M	M	L

A escolha da presidente é feita usando o método seguinte.

- Seleciona-se um par de candidatos e, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, elabora-se uma nova tabela apenas com os dois candidatos que constituem esse par.
- Comparam-se esses candidatos, contabilizando-se apenas a primeira linha; o candidato com o maior número de votos na primeira linha é o vencedor do par escolhido.
- Repetem-se os pontos anteriores até terem sido comparados todos os pares de candidatos.
- Indica-se, caso exista, o candidato que ganha quando comparado com os restantes candidatos.

Por exemplo, ao selecionar-se o par formado pela Maria (M) e pela Fernanda (F), obtém-se a Tabela 2.

Tabela 2

	1500 votos	**2100 votos**	**1000 votos**	**1500 votos**
1.ª linha	M	F	F	F
2.ª linha	F	M	M	M

Comparando as duas candidatas, a Fernanda é a vencedora, uma vez que tem 4600 votos na primeira linha, enquanto a Maria tem 1500 votos nessa linha.

Determine, caso exista, a candidata escolhida para presidente da comissão organizadora, aplicando o método descrito.

1.2. Para incentivar a participação de habitantes de algumas aldeias vizinhas da junta de freguesia de Freixo, a comissão organizadora decidiu distribuir 360 convites pelas aldeias A, B, C e D.

A Tabela 3 apresenta o número de habitantes de cada uma das aldeias.

Tabela 3

Aldeia	**A**	**B**	**C**	**D**
Número de habitantes	4000	3800	3200	2500

A presidente da comissão organizadora distribuiu os convites usando o método seguinte.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de habitantes pelo número de convites.
- Calcula-se a quota padrão para cada uma das aldeias, dividindo-se o número de habitantes de cada aldeia pelo divisor padrão.
- Se a quota padrão é um número inteiro, atribui-se à aldeia essa quota.
- Se a quota padrão não é um número inteiro, calcula-se $\sqrt{L \times (L+1)}$, sendo L o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Se a quota padrão é menor do que $\sqrt{L \times (L+1)}$, atribui-se a cada aldeia uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão; se a quota padrão é maior do que $\sqrt{L \times (L+1)}$, atribui-se a cada aldeia uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão.
- Caso a soma das quotas padrão arredondadas seja igual ao número de convites a distribuir, o método dá-se por finalizado, e assume-se que o número de convites para cada aldeia é igual à quota padrão arredondada; caso a soma das quotas padrão arredondadas seja diferente do número de convites a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota modificada de cada aldeia.
- Repetem-se os cinco pontos anteriores até se obter a soma das quotas padrão modificadas igual ao número de convites a distribuir.

Determine quantos convites foram distribuídos em cada aldeia, aplicando o método descrito.

Apresente os valores das quotas padrão e os valores de $\sqrt{L \times (L+1)}$ arredondados com duas casas decimais.

2. A junta de freguesia de Freixo promoveu atividades desportivas entre os habitantes da vila de Freixo (F) e das aldeias A, B, C e D.

Na Tabela 4, estão indicadas as distâncias, em quilómetros, entre A, B, C, D e F.

Tabela 4

	B	**C**	**D**	**F**
A	28	38	30	18
B	—	36	32	26
C	—	—	48	20
D	—	—	—	24

Para transportar os habitantes, o presidente da junta de freguesia pretende encontrar um percurso que ligue todos os locais referidos. De modo a encontrar esse percurso, o presidente da junta apoiou-se nos dados da Tabela 4 e no algoritmo seguinte.

Algoritmo

Passo 1: define-se a vila de Freixo como ponto de partida.

Passo 2: seleciona-se a aldeia mais próxima, tendo em conta que, se houver duas aldeias à mesma distância, a seleção é aleatória.

Passo 3 e passos seguintes: procede-se como foi indicado no passo anterior, não se repetindo nenhuma aldeia, e regressando-se ao ponto de partida depois de visitadas todas as aldeias.

Uma semana antes do início do serviço de transporte, é feito o anúncio seguinte.

«Se a estrada que liga a aldeia A à aldeia B estiver intransitável, é necessário percorrer mais quilómetros para utilizar um percurso alternativo.»

Justifique a veracidade ou a falsidade da informação, aplicando o algoritmo acima descrito aos dois casos:

- a estrada que liga A a B está transitável;
- a estrada que liga A a B está intransitável.

3. Uma empresa de *marketing* analisa dados relativos às vendas mensais de dois produtos, telemóveis e computadores, de uma determinada marca, no mesmo período de tempo.

O número N de telemóveis vendidos dessa marca, em milhares, t meses após o início das vendas, é bem aproximado por $N(t) = 4,8 \times 3^{0,15t} \quad (t = 1, 2, 3, ...)$

Na Tabela 5, apresenta-se o número V de computadores vendidos dessa marca, em milhares, t meses após o início das vendas.

Tabela 5

t **(em meses)**	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V **(em milhares)**	0,541	2,532	13,163	14,204	15,105	16,236	16,257	16,288	16,290

3.1. Entre o quinto e o sexto mês após o início das vendas, o número N de telemóveis vendidos aumentou.

Determine o valor desse aumento.

Apresente o resultado em milhares, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. Um modelo que se ajusta bem à nuvem de pontos correspondente ao número V de computadores vendidos, em função de t, é da forma $V(t) = \dfrac{c}{1 + a \times e^{-bt}}$

Determine as constantes a, b e c, recorrendo à calculadora.

Apresente os valores de a, b e c, com arredondamento às centésimas.

3.3. Considere, agora, que o número V de computadores vendidos dessa marca, em milhares, t meses após o início das vendas, é bem aproximado por $V(t) = \dfrac{16}{1 + 2307 \times e^{-3t}} \quad (t = 1, 2, 3, ...)$

Justifique a veracidade ou a falsidade da afirmação seguinte, a partir da análise de representações gráficas dos modelos para o número N de telemóveis vendidos e para o número V de computadores vendidos, considerando o período de um ano após o início das vendas.

«Até ao final do segundo mês após o início das vendas, o número N de telemóveis vendidos é maior, porque, para esse período de tempo, a curva que o representa está acima da curva que representa o número V de computadores vendidos. Mas, no final do terceiro mês e a partir daí, o número V de computadores vendidos é maior, uma vez que as curvas se intersectam e a curva que representa o número V de computadores vendidos fica sempre acima da curva que representa o número N de telemóveis vendidos.»

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, na folha de respostas, a representação gráfica visualizada na calculadora relativa ao modelo N;
- reproduzir, na folha de respostas, a representação gráfica visualizada na calculadora relativa ao modelo V;
- reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
- indicar se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando.

4. A Maria analisou algumas das características dos alunos de Francês de três escolas.

4.1. Para concretizar esse estudo na sua escola, escolheu aleatoriamente uma amostra de entre os alunos de Francês.

Na Tabela 6, apresentam-se os dados que a Maria recolheu, nessa amostra, relativamente à idade dos alunos.

Tabela 6

Idade	14	15	16	p
Número de alunos	6	10	6	2

A Maria sabe que escreveu corretamente os valores de idade 14, 15 e 16 na calculadora, porque conferiu os valores depois de os ter introduzido. Ao efetuar o cálculo, a Maria obteve um valor igual a $48{,}5$ para a média de idades. Nesse momento, a Maria teve a certeza de se ter enganado ao escrever o valor de idade, p, mas não sabia que número tinha escrito.

Determine o número que a Maria escreveu, com o qual obteve erradamente a média de idades igual a $48{,}5$

4.2. No Gráfico 1, apresenta-se o número de alunos de Francês com 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 irmãos, de uma amostra escolhida pela Maria na sua escola.

Na Tabela 7, apresenta-se o número de alunos de Francês com 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 irmãos, de uma amostra de outra escola.

Gráfico 1

Número de irmãos, por aluno

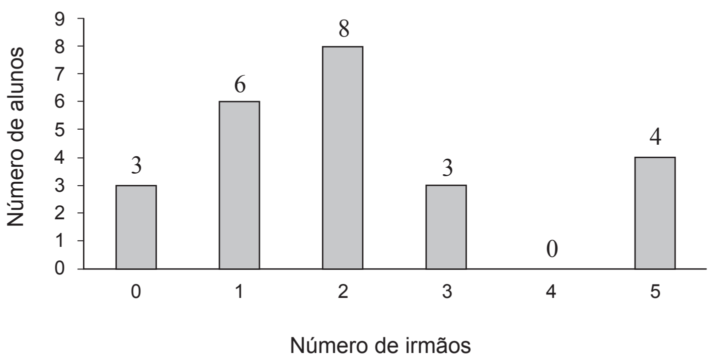


Tabela 7

N.º de irmãos	**N.º de alunos**
0	1
1	4
2	14
3	4
4	1
5	0

Compare as duas amostras quanto à variabilidade de cada uma delas relativamente à média.

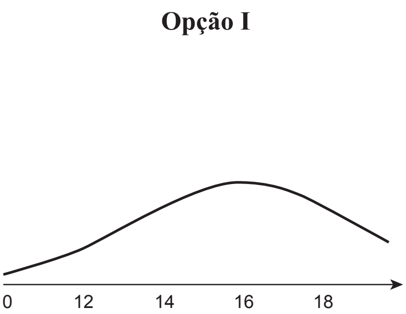
Na sua resposta, deve:

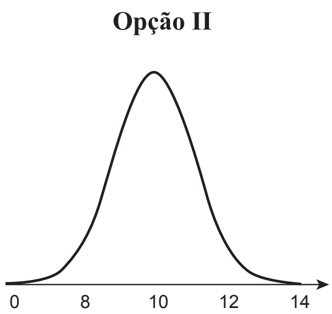
- determinar a média de cada uma das amostras;
- determinar o desvio padrão de cada uma das amostras;
- interpretar os resultados obtidos.

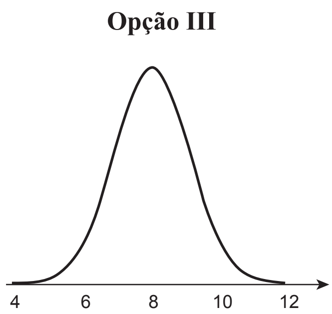
Caso proceda a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.3. A Maria recolheu as classificações dos alunos na disciplina de Francês, de três amostras distintas, com o mesmo número de alunos, uma de cada escola, A, B e C. A classificação média dos alunos da escola B na disciplina de Francês é cerca de duas vezes superior à classificação média dos alunos da escola A na disciplina de Francês, e as classificações dos alunos da escola C na disciplina de Francês são dois valores superiores às classificações dos alunos da escola A na disciplina de Francês.

Indique, justificando, a mancha de histograma correspondente a cada uma das amostras de classificações dos alunos na disciplina de Francês em cada uma das escolas.







Na sua resposta, deve:

- estabelecer a correspondência entre cada uma das opções e a respetiva escola;
- justificar cada uma das correspondências estabelecidas.

4.4. Os alunos do 11.º ano que, em 2012, frequentam a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais na escola da Maria pretendem fazer uma investigação sobre as classificações dos alunos do ensino secundário na língua estrangeira, com vista a estimar a classificação média por aluno.

Para calcularem quantos alunos devem ser estudados, decidem que a amplitude do intervalo de confiança será, no máximo, de 2 valores e que este terá um nível de confiança de 95%

Dos dados recolhidos no ano de 2011, retirou-se a informação de que o desvio padrão populacional é de 3 valores.

Determine a dimensão mínima da amostra a utilizar pelos alunos do 11.º ano que, em 2012, frequentam a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais na escola da Maria, considerando que a distribuição das notas em 2012 é aproximadamente normal e tem a mesma variabilidade que a distribuição das notas de 2011.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5. A produção anual de centeio, milho e trigo de uma região do norte da Europa é de $92\,000$ sacas. A transação desses produtos envolve os mercados interno e externo. Sabe-se que:

- 23% da produção é de centeio;
- um quarto da produção de centeio é transacionada no mercado interno;
- $11\,960$ sacas de milho são transacionadas no mercado externo;
- 50% das $11\,040$ sacas de trigo produzidas são transacionadas no mercado interno.

5.1. A partir dos dados apresentados, complete a Tabela 8, usando percentagens.

Reproduza a tabela na folha de respostas e apresente todos os cálculos efetuados.

Tabela 8

	Centeio	Milho	Trigo	**Total**
Mercado externo				
Mercado interno				
Total	23%			100%

5.2. Considere a variável aleatória X, «massa, em quilogramas, de uma saca de cereais escolhida ao acaso de entre as sacas de cereais que, por dia, são embaladas numa determinada fábrica».

A variável aleatória X segue, aproximadamente, uma distribuição normal de valor médio igual a 1000 quilogramas e desvio padrão igual a 16 quilogramas.

Note que:

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68{,}27\%$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95{,}45\%$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99{,}73\%$

Escolhe-se, aleatoriamente, uma saca de cereais.

Determine um valor aproximado para a probabilidade de a saca escolhida apresentar uma massa compreendida entre 968 quilogramas e 1016 quilogramas.

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

1.		
1.1.	20 pontos	
1.2.	20 pontos	
		40 pontos
2.	15 pontos	
		15 pontos
3.		
3.1.	10 pontos	
3.2.	15 pontos	
3.3.	20 pontos	
		45 pontos
4.		
4.1.	15 pontos	
4.2.	15 pontos	
4.3.	20 pontos	
4.4.	15 pontos	
		65 pontos
5.		
5.1.	15 pontos	
5.2.	20 pontos	
		35 pontos
	TOTAL	**200 pontos**